

# Analiza matematyczna I

## Zestaw I

**Zasady uzyskania zaliczenia:** W trakcie semestru odbędą się dwa zapowiedziane kolokwia - każde za 50 punktów. Oprócz napisania kolokwiów należy zdobywać dodatkowe punkty za aktywność na zajęciach. Ocena wystawiona będzie według następującej zasady: 50 – 60 pkt. - **dst.**, 61 – 70 pkt. - **plus dst.**, 71 – 80 pkt. - **db.**, 81 – 90 pkt. - **plus db.**, 91 – 100 pkt. - **bdb.** Można poprawić kolokwium, przy czym w przypadku poprawienia na ocenę niższą wynik nie jest brany pod uwagę. Można mieć co najwyżej dwie nieusprawiedliwione nieobecności na ćwiczeniach.

### Rekomendowane zbiory zadań:

- W. Krywicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*,
- W. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*.

**Zadanie 1.** Czy zbiór  $A = \{4n : n \in \mathbb{N}\}$  jest ograniczony?

**Zadanie 2.** Wyznaczyć kresy zbioru

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

**Zadanie 3.** Dla funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem  $f(x) = x^2$  wyznaczyć

- |                      |                    |                           |
|----------------------|--------------------|---------------------------|
| 1) $f[(-1, 2)]$      | 2) $f[(1, 2)]$     | 3) $f^{-1}[(-\infty, 9)]$ |
| 4) $f^{-1}[(4, 16)]$ | 5) $f^{-1}[\{1\}]$ | 6) $f^{-1}[\{0\}]$        |

**Zadanie 4.** Dla funkcji  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem  $f(x, y) = x + y + 3$  wyznaczyć

- |                              |                      |
|------------------------------|----------------------|
| 1) $f[(1, 2) \times (0, 3)]$ | 2) $f^{-1}[(-1, 1)]$ |
|------------------------------|----------------------|

**Zadanie 5.** Czy funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x) = \log_3(x^2 + 1)$  jest injekcją lub surjekcją?

**Zadanie 6.** Czy funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x) = 2^x - 1$  jest bijekcją? Czy funkcja  $g: \mathbb{R} \rightarrow (-1, +\infty)$  dana wzorem  $g(x) = 2^x - 1$  jest odwracalna? Jeśli tak, wyznaczyć funkcję odwrotną  $g^{-1}$ .

**Zadanie 8.** Sprawdzić, czy istnieje następująca granica funkcji:

1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x}}$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \sin \frac{1}{x} \right)$$

**Zadanie 9.** Policzyc granicę funkcji

1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(100x)}{\sin(20x)}$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(x^2 - 4x)}{x^2 - 16}$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$$

4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{7x}$$

5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(5x)}{\sin(7x)}$$

6)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 \cos(4x)}{\sin(2x) \cdot \sin(5x)}$$

**Zadanie 10.** Policzyc granicę funkcji

1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{x}$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{x^2 - 2x}$$

**Zadanie 11.** Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach, obliczyć granicę funkcji

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^2}.$$

**Zadanie 12.** Korzystając z twierdzenia o dwóch funkcjach uzasadnić, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin x - e^x) = -\infty.$$

**Zadanie 13.** Korzystając z definicji Cauchy'ego granicy funkcji wykazać, że

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5 - 3x) = -1.$$

**Zadanie 14.** Dobrać  $a$  i  $b$  tak, aby funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+4}-2} & \text{dla } x < 0 \\ ax + b & \text{dla } x \in [0, 3] \\ \frac{\sin(x^2-9)}{x^3-27} & \text{dla } x > 3. \end{cases}$$

była ciągła.

**Zadanie 15.** Policzyc granice jednostronne w punkcie  $x_0 = 0$  funkcji  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Czy funkcja  $f$  jest ciągła?

**Zadanie 16.** Zbadać ciągłość funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem

1)  $f(x) = [x]$

2)  $f(x) = x - [x]$

**Zadanie 18.** Policzyc granicę funkcji

1)

2)

3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{\frac{n}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin \frac{\pi}{4}}$$

**Prove:**  
 $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

people who don't know  
what the task is



people who do



Patrz: Zadanie 13.